

Plans parallèles dans l'espace et section d'un cube

Je partage aujourd'hui avec vous ces deux exercices que je viens de travailler pour les placer dans le volume VII de *Acquisition des fondamentaux*. La seconde question peut facilement être posée à un oral, ou utilisée pour agrémenter une leçon que l'on expose : on arrive assez bien à la retenir après le premier choc de la découverte.

J'ai proposé deux solutions pour la Question 1, l'une au niveau lycée, l'autre en utilisant des directions de sous-espaces affines. La première est utile pour répondre au niveau du secondaire, la seconde permet de généraliser la propriété à un espace de dimension finie quelconque.

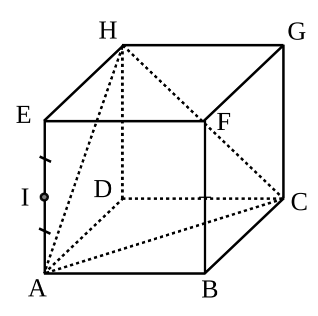
Bon entraînement !

Question 1 *On se place dans un espace de dimension trois. On demande de montrer les deux propriétés suivantes :*

a) Si deux plans P et Q sont parallèles et si P coupe un plan R suivant une droite D, alors Q coupe R suivant une droite L parallèle à D.

b) Deux plans parallèles P et Q coupent deux autres plans parallèles R et S suivant des droites $D = P \cap R$ et $\Delta = Q \cap S$. Montrer que D et Δ sont parallèles.

Question 2 *Tracer la section du cube ci-dessous avec le plan Π passant par le milieu I de $[AE]$ et parallèle au plan (ACH). Justifiez la construction.*



Réponse 1 La FIG. 1 permet de suivre les raisonnements.

a) *Première solution (lycée)* — Par hypothèse $D = P \cap R$ est une droite. Si $Q \cap R$ n'en était pas une, cela voudrait dire que Q et R sont parallèles (au sens large), mais alors, la relation de parallélisme étant transitive, les plans P, Q, R seraient tous parallèles entre eux, ce qui est impossible puisque $P \cap R$ est une droite.

Donc $L = Q \cap R$ est une droite.

Les droites D et L sont coplanaires, puisqu'incluses dans le plan R. Si elles n'étaient pas parallèles, elles seraient sécantes (au sens large) et il existerait un point M appartenant à $D \cap L$, donc aussi *a fortiori* à $P \cap Q$. Comme $P // Q$, on aurait $P = Q$, donc $D = P \cap R = Q \cap R = L$, ce qui est absurde car D et L sont supposées non parallèles. En conclusion, D et L seront parallèles.

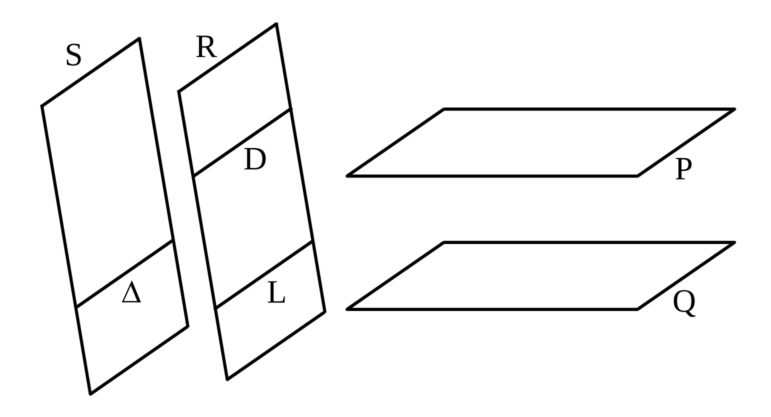


Figure 1: Une propriété des intersections de plans

Deuxième solution (université) — Notons avec des flèches les directions des sous-espaces affines qui interviennent. Par hypothèse $P // Q$ et $D = P \cap R$ est une droite, donc $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{Q}$ et $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{P} \cap \overrightarrow{R}$. Par suite :

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{P} \cap \overrightarrow{R} = \overrightarrow{Q} \cap \overrightarrow{R}$$

donc Q et R ne sont pas parallèles et s'intercepteront suivant une droite L de direction $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{Q} \cap \overrightarrow{R}$. De $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{Q} \cap \overrightarrow{R} = \overrightarrow{D}$ on déduit que les droites D et L seront parallèles.

Remarque — Cette seconde solution se généralise à un espace affine de dimension finie quelconque $n \geq 2$ si l'on remplace les plans par des hyperplans, et les droites par des sous-espaces affines de dimension $n - 2$.

b) *Première solution (lycée)* — Soit $L = Q \cap R$. D'après la question précédente, L est une droite et :

$$\left.\begin{array}{l} P//Q \\ D = P \cap R \\ L = Q \cap R \end{array}\right\} \Rightarrow D//L$$

$$\left.\begin{array}{l} S//R \\ \Delta = S \cap Q \\ L = R \cap Q \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta//L.$$

De $D//L$ et $L//\Delta$ on déduit que $D//\Delta$ par transitivité de la relation de parallélisme entre les droites de l'espace.

Deuxième solution (université) — On sait que l'intersection de deux sous-espaces affines est soit vide, soit un espace affine de direction l'intersection des directions de ces plans. Ici on suppose que $D = P \cap R$ et $\Delta = Q \cap S$ ne sont pas vides et sont des droites. Donc $D = P \cap R$ est la droite de direction $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{P} \cap \overrightarrow{R}$, intersection des directions $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{R}$ des plans P et R. De même, avec des notations triviales, $\overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{Q} \cap \overrightarrow{S}$. Par hypothèse $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{Q}$ et $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{S}$ donc :

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{P} \cap \overrightarrow{R} = \overrightarrow{Q} \cap \overrightarrow{S} = \overrightarrow{\Delta}$$

et cela prouve que D et Δ sont parallèles.

Remarque — Cette seconde solution reste valide en dimension finie quelconque $n \geq 2$ en remplaçant les plans par des hyperplans, et les droites par des sous-espaces affines de dimension $n - 2$.

Réponse 2 La construction de la section du cube par le plan Π est donnée par l'hexagone régulier $IJKLMN$ dessiné sur la FIG. 2.

Pour le voir, il faut d'abord s'intéresser à la trace du plan Π sur le plan $(ADHE)$ contenant la face $ADHE$ du cube. Les deux plans Π et (ACH) étant parallèles, ils couperont le plan $(ADHE)$ suivant deux droites parallèles (Question 1), donc $\Pi \cap (ADHE)$ sera la droite passant par I et parallèle à (AH). Sur la FIG. 2, nous avons tracé le point J de $[EH]$ tel que $(IJ) // (AH)$, de sorte que $[IJ]$ soit la trace de Π sur la face $ADHE$ du cube.

La trace de Π sur la face $EFGH$ sera incluse dans une droite parallèle à (AC) parce que deux plans parallèles coupent toujours deux autres plans parallèles en deux droites parallèles. Ici les plans $(EFGH)$ et $(ABCD)$ sont parallèles,

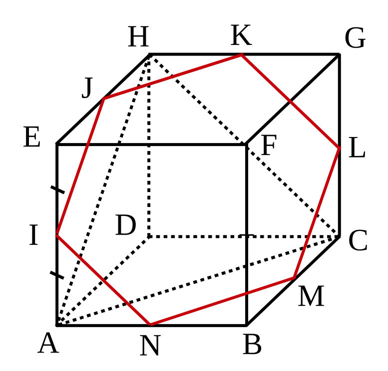


Figure 2: La plan $(IJKLMN)$ est parallèle au plan (ACH)

donc les plans parallèles Π et (ACH) les couperont suivant deux droites parallèles, à savoir une droite passant par J, et la droite (AC). Cela montre que $\Pi \cap (EFGH)$ est la droite passant par J et parallèle à (AC), qui coupe (HG) en K.

On raisonne de cette façon jusqu'au bout :

- Π coupe $(DCGH)$ en une droite passant par K, parallèle à (HC), d'où L,
- Π coupe $(BCGF)$ en une droite passant par L et parallèle à (AH), d'où M,
- Π coupe $(ABCD)$ en une droite passant par M et parallèle à (AC), d'où N.

Le Théorème de Thalès permet de montrer que tous les sommets de l'hexagone $IJKLMN$ sont des milieux des arêtes du cube, et ont même longueur égale à la moitié de la diagonale d'une face du cube, de sorte que l'on puisse affirmer que $IJKLMN$ est un hexagone régulier.

La section du plan Π sur le cube est exactement l'intérieur de cet hexagone régulier.

References

[1] D.-J. Mercier, Acquisition des fondamentaux pour les concours, Vol. VII - Autres questions lumineuses, à paraître.